

# Zajam



# Zajam

- **Zajam** predstavlja imovinsko-pravni odnos između zajmodavca i zajmoprimca.
  - Taj se odnos regulira posebnim ugovorom o zajmu tako da se u njemu definiraju:
    - a. iznos odobrenog zajma,
    - b. Kamatnjak,
    - c. način na koji će se obračunati iznos kamata,
    - d. vrijeme otplate zajma,
    - e. način otplate zajma.
- Zajam zajmoprimac vraća zajmodavcu anuitetima.
  - Anuiteti su iznosi razdoblja koji se sastoje od otplatnih kvota i kamata.
  - Naime, krajem razdoblja zajmoprimac je dužan vratiti posuđenu glavnica (zajam), kao i iznos obračunatih, složenih kamata.
  - Pregled otplate zajma nalazi se u otplatnoj tablici (planu) koja se sastoji od stupaca u kojima se navode: razdoblje otplate zajma, anuiteti, kamate, otplatne kvote i ostatak dugovanja.

## Model otplate zajma jednakim anuitetima (dekurzivno)

- Pretpostavljamo da se zajam  $C_0$  otplaćuje uz složen i dekurzivan obračun kamata i jednake anuitete  $a$ , krajem razdoblja.
- Kamatnjak se tijekom cijelog razdoblja otplate zajma ne mijenja.
- Da bismo odredili izraz za iznos jednakih anuiteta kojima se vraća zajam uočavamo analogiju između jednakih periodičnih uplata krajem godine i jednakih anuiteta  $a$  kao i između sadašnje vrijednosti postnumerando uplata i odobrenog zajma.

Iznos jednakih anuiteta	Kamate k-tog razdoblja	Otplatna kvota k-tog razdoblja	Ostatak dugovanja k-tog razdoblja
$a = C_0 \cdot \frac{r^n (r - 1)}{r^n - 1}$	$I_k = \frac{C_{k-1} \cdot p}{100}$	$R_k = a - I_k$	$C_k = C_{k-1} - R_k$

## Model otplate zajma jednakim anuitetima (dekurzivno)

**Primjer:** Odredite iznos jednakih anuiteta koje će poduzeće otplaćivati krajem ž godine tijekom 5 godina uz 12 % godišnjih, dekurzivnih kamata za zajam od 150.000,00 kn.

$$C_0 = 150000$$

$$n = 5$$

$$p = 12$$

$$r = 1 + \frac{12}{100} = 1,12$$

$$a = C_0 \cdot \frac{r^n (r - 1)}{r^n - 1}$$

$$a = 150.000 \cdot \frac{1,12^5 (1,12 - 1)}{1,12^5 - 1}$$

$$a = 41.611,46$$

# Otplatna tablica

Otplatna tablica se sastoji od sljedećih stupaca:

- 1. Razdoblje** – označava broj razdoblja u kojem dolazi do novčanog tijeka.  
Nulto razdoblje je razdoblje u kojemu je odobreni zajam stavljen na raspolaganje.  
Posljednje razdoblje je ono razdoblje u kojemu dolazi do posljednjeg novčanog tijeka.  
U nulto razdoblje se upisuje samo iznos odobrenog zajma koji predstavlja ostatak dugovanja.
- 2. Anuitet (otplatni obrok)** – u tom stupcu su iznosi koji se sastoje od dijela kojim se vraća glavnica (zajam) i dijela kojim se vraća kamata na glavnicu.
- 3. Kamate** – u taj stupac se unosi iznos kamata na ostatak dugovanja koji treba otplatiti za sva razdoblja osim nultog.
- 4. Otplatna kvota** – u taj se stupac unose iznosi kojima se vraća glavnica, odnosno zajam.

## Model otplate zajma jednakim anuitetima (dekurzivno)

**Primjer:** Odredite iznos jednakih anuiteta koje će poduzeće otplaćivati krajem godine tijekom 5 godina uz 12 % godišnjih, dekurzivnih kamata za zajam od 150.000,00 kn.

Za 1. razdoblje:

$$I_1 = \frac{C_0 \cdot p}{100} = \frac{150.000 \cdot 12}{100} = 18.000$$

$$R_1 = a - I_1 = 41.611,46 - 18.000 = 23.611,46$$

$$C_1 = C_0 - R_1 = 150.000 - 23.611,46 = 126.388,54$$

Za 2. razdoblje:

$$I_2 = \frac{C_1 \cdot p}{100} = \frac{126.388,62 \cdot 12}{100} = 15.166,62$$

$$R_2 = a - I_2 = 41.611,46 - 15.166,62 = 26.444,84$$

$$C_1 = C_1 - R_2 = 126.388,54 - 26.444,84 = 99.043,70$$

## Model otplate zajma jednakim anuitetima (dekurzivno)

**Primjer:** Odredite iznos jednakih anuiteta koje će poduzeće otplaćivati krajem ž godine tijekom 5 godina uz 12 % godišnjih, dekurzivnih kamata za zajam od 150.000,00 kn.

Za 3. razdoblje:

$$I_3 = \frac{C_2 \cdot p}{100} = \frac{99.943,70 \cdot 12}{100} = 11.993,24$$

$$R_3 = a - I_2 = 41.611,46 - 11.993,24 = 29.618,22$$

$$C_3 = C_2 - R_3 = 99.943,70 - 29.618,22 = 70.325,48$$

Za 4. razdoblje:

$$I_4 = \frac{C_3 \cdot p}{100} = \frac{70.325,48 \cdot 12}{100} = 8.439,06$$

$$R_4 = a - I_4 = 41.611,46 - 8.439,06 = 33.172,40$$

$$C_4 = C_3 - R_4 = 70.325,48 - 33.172,40 = 37.153,08$$

Za 5. razdoblje:

$$I_5 = \frac{C_4 \cdot p}{100} = \frac{37.153,08 \cdot 12}{100} = 4.458,37$$

$$R_5 = a - I_5 = 41.611,46 - 4.458,37 = 37.153,08$$

$$C_5 = C_4 - R_5 = 37.153,08 - 37.153,08 = 0$$

## Model otplate zajma jednakim anuitetima (dekurzivno)

**Primjer:** Odredite iznos jednakih anuiteta koje će poduzeće otplaćivati krajem ž godine tijekom 5 godina uz 12 % godišnjih, dekurzivnih kamata za zajam od 150.000,00 kn.

Kraj k-tog razdoblja	Anuitet	Kamate	Otplatna kvota	Ostatak dugovanja
0				150.000,00
1	41.611,46	18.000,00	23.611,46	126.388,54
2	41.611,46	15.166,62	26.444,84	99.043,70
3	41.611,46	11.993,24	29.618,22	70.325,48
4	41.611,46	8.439,06	33.172,40	37.153,08
5	41.611,46	4.458,37	37.153,08	0
<b>Ukupno</b>	208.057,30	58.057,29	150.000,00	



## Model otplate zajma dogovorenim jednakim anuitetima (dekurzivno)

- U praksi se često radi jednostavnijeg obračuna zajma, kao i pružanja prilike zajmoprimcu da odredi iznos anuiteta za koji pretpostavlja da će moći otplaćivati, primjenjuje model otplate zajma unaprijed dogovorenim anuitetima.

Kamate	Otplatna kvota	Ostatak dugovanja
$I_k = \frac{C_{k-1} \cdot p}{100}, \sum I_k = n \cdot a + a'_{n+1} - C_0$	$R_k = a - I_k$	$C_k = C_{k-1} - R_k$
Broj godina otplate	Nepotpuni anuitet	
$n = \frac{\log a - \log(a \cdot (r-1))}{\log r}$	$a'_{n+1} = C_0 \cdot r^{n+1} - a \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$	

## Model otplate zajma dogovorenim jednakim anuitetima (dekurzivno)

**Primjer:** Poduzeće traži zajam u iznosu od 230.000,00 kn uz 15 % godišnjih dekurzivnih kamata i procjenjuje da će moći plaćati anuitete od po 80.000,00 kn krajem godine uz složen, godišnji i dekurzivni obračun kamata. Izradite otplatnu tablicu.

$$n = \frac{\log a - \log(a - C \cdot (r - 1))}{\log r}$$

$$n = \frac{\log 80.000 - \log(80.000 - 230.000 \cdot (1,15 - 1))}{\log 1,15}$$

$$n = 4,03768$$

Kako je  $n$  veći od 4, zaključujemo da će poduzeće četiri godine plaćati dogovoreni anuitet, a pete godine nepotpuni ili krnji anuitet.

$$a'_{n+1} = C_0 \cdot r^{n+1} - a \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

$$a'_{4+1} = 230.000 \cdot 1,15^{4+1} - 80.000 \cdot 1,15 \cdot \frac{1,15^4 - 1}{1,15 - 1}$$

$$a'_5 = 3.221,66$$

## Model otplate zajma dogovorenim jednakim anuitetima (dekurzivno)

**Primjer:** Poduzeće traži zajam u iznosu od 230.000,00 kn uz 15 % godišnjih dekurzivnih kamata i procjenjuje da će moći plaćati anuitete od po 80.000,00 kn krajem godine uz složen, godišnji i dekurzivni obračun kamata. Izradite otplatnu tablicu.

$k = 1:$

$$I_1 = \frac{C_0 \cdot p}{100} = \frac{230.000 \cdot 15}{100} = 34.500$$

$$R_1 = a - I_1 = 80.000 - 34.500 = 45.500$$

$$C_1 = C_0 - R_1 = 230.000 - 45.500 = 184.500$$

$k = 2:$

$$I_2 = \frac{C_1 \cdot p}{100} = \frac{184.500 \cdot 15}{100} = 27.675$$

$$R_2 = a - I_2 = 80.000 - 27.675 = 52.325$$

$$C_2 = C_1 - R_2 = 184.500 - 52.325 = 132.175$$

## Model otplate zajma dogovorenim jednakim anuitetima (dekurzivno)

**Primjer:** Poduzeće traži zajam u iznosu od 230.000,00 kn uz 15 % godišnjih dekurzivnih kamata i procjenjuje da će moći plaćati anuitete od po 80.000,00 kn krajem godine uz složen, godišnji i dekurzivni obračun kamata. Izradite otplatnu tablicu.

$k = 3:$

$$I_3 = \frac{C_2 \cdot p}{100} = \frac{132.175 \cdot 15}{100} = 19.826,25$$

$$R_3 = a - I_3 = 80.000 - 19.826,25 = 60.173,75$$

$$C_3 = C_2 - R_3 = 132.175 - 60.173,75 = 72.001,25$$

$k = 4:$

$$I_4 = \frac{C_3 \cdot p}{100} = \frac{72.001,25 \cdot 15}{100} = 10.800,19$$

$$R_4 = a - I_4 = 80.000 - 10.800,19 = 69.199,81$$

$$C_4 = C_3 - R_4 = 72.001,25 - 69.199,81 = 2.801,44$$

$k = 5:$

$$I_5 = \frac{C_4 \cdot p}{100} = \frac{2.801,44 \cdot 15}{100} = 420,22$$

$$R_5 = C_4 = 2.801,44$$

$$C_5 = C_4 - R_5 = 2.801,44 - 2.801,44 = 0$$

## Model otplate zajma dogovorenim jednakim anuitetima (dekurzivno)

**Primjer:** Poduzeće traži zajam u iznosu od 230.000,00 kn uz 15 % godišnjih dekurzivnih kamata i procjenjuje da će moći plaćati anuitete od po 80.000,00 kn krajem godine uz složen, godišnji i dekurzivni obračun kamata. Izradite otplatnu tablicu.

Kraj k-tog razdoblja	Anuitet	Kamate	Otplatna kvota	Ostatak dugovanja
0				230.000,00
1	80.000,00	34.500,00	45.500,00	184.500,00
2	80.000,00	27.675,00	52.325,00	132.175,00
3	80.000,00	19.826,25	60.173,75	72.001,25
4	80.000,00	10.800,19	69.199,81	1801,44
5	3.221,66	420,22	2.801,44	0
<b>Ukupno</b>	<b>323.221,66</b>	<b>93.221,66</b>	<b>230.000,00</b>	

## Model otplate zajma jednakim otplatnim kvotama (dekurzivno)

- Model otplate zajma promjenjivim anuitetom najčešće se upotrebljava kada korisnik zajma procijeni, očekujući efekte budućeg poslovanja, da će mu taj model otplate odgovarati.

Anuiteti	Kamate	Otplatna kvota	Ostatak dugovanja
$a_k = I_k + R$ $a_k = \frac{C_0}{n} \cdot \left( (n-k+1) \cdot \frac{p}{100} + 1 \right)$ $\sum a_k = \sum I_k + C_0$	$I_k = \frac{C_{k-1} \cdot p}{100}$ $\sum I_k = \frac{C_0 \cdot p}{200} \cdot (n-1)$	$R = \frac{C_0}{n}$	$C_k = C_{k-1} - R_k$ $C_k = C_0 \cdot \left( 1 - \frac{k}{n} \right)$

# Model otplate zajma jednakim otplatnim kvotama (dekurzivno)

**Primjer:** Poduzeću je odobren zajam u iznosu od 150.000,00 kn na razdoblje od 3 godine, uz složen, godišnji i dekurzivni obračun kamata i godišnji kamatnjak 8. Zajam će se otplaćivati jednakim otplatnim kvotama, krajem godine. Izradite otplatnu tablicu.

$$R = \frac{C_0}{n} = \frac{150.000}{3} = 50.000$$

$k = 2:$

$$C_2 = C_1 - R = 100.000 - 50.000 = 50.000$$

$$I_2 = \frac{C_1 \cdot p}{100} = \frac{100.000 \cdot 8}{100} = 8.000$$

$$a_2 = I_2 + R = 8.000 + 50.000 = 58.000$$

$k = 1:$

$$C_1 = C_0 - R = 150.000 - 50.000 = 100.000$$

$$I_1 = \frac{C_0 \cdot p}{100} = \frac{150.000 \cdot 8}{100} = 12.000$$

$$a_1 = I_1 + R = 12.000 + 50.000 = 62.000$$

$k = 3:$

$$C_3 = C_2 - R = 50.000 - 50.000 = 0$$

$$I_3 = \frac{C_2 \cdot p}{100} = \frac{50.000 \cdot 8}{100} = 4.000$$

$$a_3 = I_3 + R = 4.000 + 50.000 = 54.000$$

## Model otplate zajma jednakim otplatnim kvotama (dekurzivno)

**Primjer:** Poduzeću je odobren zajam u iznosu od 150.000,00 *kn* na razdoblje od 3 godine, uz složen, godišnji i dekurzivni obračun kamata i godišnji kamatnjak 8%. Zajam će se otplaćivati jednakim otplatnim kvotama, krajem godine. Izradite otplatnu tablicu.

Kraj k-tog razdoblja	Anuitet	Kamate	Otplatna kvota	Ostatak dugovanja
0				150.000,00
1	62.000,00	12.000,00	50.000,00	100.000,00
2	58.000,00	8.000,00	50.000,00	50.000,00
3	54.000,00	4.000,00	50.000,00	0
<b>Ukupno</b>	174.000,00	24.000,00	150.000,00	



# Model otplate zajma različitim anuitetima i različitim otplatnim kvotama (dekurzivno)

- Ovo je najopćenitiji model otplate zajma.
- Pretpostavke modela su sljedeće:
  - a. obračun kamata je složen i dekurzivan,
  - b. anuiteti dopijevaju u jednakim vremenskim intervalima krajem razdoblja,
  - c. razdoblje ukamaćivanja jednako je jedinici vremenskog dospijea između anuiteta,
  - d. kamatna stopa je konstantna tijekom cijelog razdoblja otplate zajma.

Anuiteti	Kamate	Otplatna kvota	Ostatak dugovanja
$\sum a_k = \sum I_k + C_0$	$I_k = \frac{C_{k-1} \cdot p}{100}$	$R_k = a_k - I_k$ $\sum R_k = C_0$	$C_k = C_{k-1} - R_k$

## Model otplate zajma različitim anuitetima i različitim otplatnim kvotama (dekurzivno)

**Primjer:** Zajam od 300.000 kn odobren je na 3 godine, uz kamatnu stopu 12 i plaćanje anuiteta krajem godine. Ako je svaka otplatna kvota dvostruko manja od prethodne, sastavi otplatnu tablicu. Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan.

$$R_2 = \frac{R_1}{2}$$

$$R_3 = \frac{R_2}{2} = \frac{R_1}{4}$$

$$C_0 = R_1 + R_2 + R_3 = R_1 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{4} \cdot R_1$$

$k = 1:$

$$I_1 = \frac{C_0 \cdot p}{100} = \frac{300.000 \cdot 12}{100} = 36.000$$

$$a_1 = I_1 + R_1 = 36.000 + 171.428,57 = 207.428,57$$

$$C_1 = C_0 - R_1 = 300.000 - 171.428,57 = 128.571,43$$

$k = 2:$

$$I_2 = \frac{C_1 \cdot p}{100} = \frac{128.571,43 \cdot 12}{100} = 15.428,57$$

$$a_2 = I_2 + R_2 = 15.428,57 + 85.714,29 = 101.142,86$$

$$C_2 = C_1 - R_2 = 128.571,43 - 101.142,86 = 27.428,57$$

$k = 3:$

$$I_3 = \frac{C_2 \cdot p}{100} = \frac{27.428,57 \cdot 12}{100} = 3.291,43$$

$$a_3 = I_3 + R_3 = 3.291,43 + 44.714,29 = 48.000$$

$$C_3 = C_2 - R_3 = 27.428,57 - 27.428,57 = 0$$

## Model otplate zajma različitim anuitetima i različitim otplatnim kvotama (dekurzivno)

**Primjer:** Zajam od 300.000 *kn* odobren je na 3 godine, uz kamatnu stopu 12 i plaćanje anuiteta krajem godine. Ako je svaka otplatna kvota dvostruko manja od prethodne, sastavi otplatnu tablicu. Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan.

Kraj k-tog razdoblja	Anuitet	Kamate	Otplatna kvota	Ostatak dugovanja
0				300.000,00
1	207.428,57	36.000,00	171.428,57	128.571,43
2	101.142,86	15.428,57	85.714,29	42.857,14
3	48.000,00	5.142,86	42.857,14	0
<b>Ukupno</b>	356.571,43	56.571,43	300.000,00	

# Zadaci

**Zadatak 1.** Napravite plan otplate zajma od 100.000 *kn* uz dekurzivan obračun kamata i jednake anuitete koji se plaćaju krajem sljedećih 5 godina uz godišnju kamatnu stopu od 10%.

Rješenje:  $a=26.379,75$

**Zadatak 2.** Zajam je odobren poduzeću na 5 godina uz 6% godišnjih kamata i otplaćuje se nominalno jednakim anuitetima krajem godine u iznosu 50.000 *kn*. Odredite iznos zajma. Obračun kamata je složen, godišnji i dekurzivan. Napravite plan otplate.

Rješenje:  $C=210.618,19$

**Zadatak 3.** Odredite koliko će godina trajati otplata zajma od 150.000 *kn* uz dekurzivnu kapitalizaciju, dogovorene anuitete od 45.000 *kn* koji se plaćaju krajem godine i godišnje kamate od 12%. Napravite otplatni plan.

Rješenje:  $n=4,5$

## Zadaci

**Zadatak 4.** Zajam u iznosu od 200.000 *kn* odobren je poduzeću na 5 godina uz 8% složenih godišnjih dekurzivnih kamata i otplaćuje se nominalno jednakim anuitetima krajem godine. Odrediti iznos nominalno jednakog godišnjeg anuiteta. Sastavite plan otplate.

Rješenje:  $a=50.091,29$

**Zadatak 5.** Zajam u iznosu 50.000 *kn* odobren je na 2 godine uz 10% dekurzivnih godišnjih kamata i plaćanje jednakih anuiteta krajem polugodišta. Izradite otplatnu tablicu ako je obračun kamata složen i polugodišnji.

Rješenje:  $a=14.061,31$

**Zadatak 6.** Zajam u iznosu 100.000 *kn* odobren je poduzeću na pet godina uz 10% godišnji dekurzivnih kamata i plaćanjem anuiteta krajem godine, pri čemu su nominalno jednake otplatne kvote. Izračunati otplatne kvote i sastaviti plan otplate.

Rješenje:  $R=20.000,00$

# Interkalarna kamata

- **Interkalarna kamata** je kamata koju zajmoprimatelj plaća na odobrena sredstva za razdoblje od trenutka doznake tih sredstava do trenutka kada se ona počinju otplaćivati.
- Interkalarna kamata se može:
  - a. otplatiti odjednom, u trenutku početka otplate zajama,
  - b. dodati iznosu odobrenog zajma u trenutku početka otplaćivanja zajma.

## Interkalarna kamata

**Primjer:** Zajam od 450.000 kn odobren je poduzeću na deset godina, uz godišnji kamatnjak 10%, plaćanje jednakih anuiteta krajem godine i poček od dvije godine. Obračun kamata je složen, godišnji i dekurzivan. Izračunajte anuitet ako se interkalarne kamate plaćaju odmah.

$$r = 1 + \frac{10}{100} = 1,1$$

Najprije izračunamo vrijednost zajma nakon dvije godine:  $C_2 = C_0 \cdot r = 450.000 \cdot 1,1^2 = 544.500$

Interkalarne kamate:  $I = C_2 - C_0 = 544.500 - 450.000 = 94.500$

Interkalarne kamate se plaćaju odmah, pa je  $C_0 = 450.000$ .

Računamo anuitet za preostalih osam godina:  $a = C_0 \cdot \frac{r^{n-2}(r-1)}{r^{n-2}-1} = 450000 \cdot \frac{1,1^8(1,1-1)}{1,1^8-1} = 84349,81$

## Interkalarna kamata

**Primjer:** Zajam od 450.000 kn odobren je poduzeću na deset godina, uz godišnji kamatnjak 10%, plaćanje jednakih anuiteta krajem godine i poček od dvije godine. Obračun kamata je složen, godišnji i dekurzivan. Izračunajte anuitet ako se interkalarne kamate dodaju iznosu zajma.

$$r = 1 + \frac{10}{100} = 1,1$$

Najprije izračunamo vrijednost zajma nakon dvije godine:  $C_2 = C_0 \cdot r = 450.000 \cdot 1,1^2 = 544.500$

Interkalarne kamate:  $I = C_2 - C_0 = 544.500 - 450.000 = 94.500$

Interkalarne se kamate dodaju iznosu zajma, pa je sad "novi" zajam  $C_2 = 544.500$ , a anuitet za preostalih osam godina:

$$a = C_2 \cdot \frac{r^n (r - 1)}{r^n - 1} = 544.500 \cdot \frac{1,1^8 (1,1 - 1)}{1,1^8 - 1} = 102.063,27$$