Prenumerando i postnumerando

Prenumerando i postnumerando

- U praksi se često vrši uplata ili isplata jednakih iznosa u jednakim vremenskim razmacima. Takve se uplate ili isplate zovu **periodične**.
- Takve se uplate ili isplate mogu vršiti na dva načina:
  a. na početku termina, to su **prenumerando** uplate ili isplate,
  b. na kraju termina, to su **postnumerando** uplate ili isplate.

- Kod periodičnih uplata ili isplata izračunava se **konačna vrijednost** svih periodičnih uplata ili isplata nakon određenog broja termina ili **sadašnja vrijednost** periodičnih uplata ili isplata koje su se pojavljivale određeni broj termina.

Konačna vrijednost prenumerando i postnumerando periodičnih uplata (isplata)

Formulu za konačnu vrijednost periodičnih uplata ili isplata možemo izvesti uz sljedeće pretpostavke:

1. uplate (isplate) su međusobno jednake,
2. uplate (isplate) se obavljaju u jednakim vremenskim intervalima,
3. razdoblje između dviju uplate (isplata) jednako je razdoblju ukamaćivanja,
4. kamatnjak je nepromjenljiv tijekom cijelog vremena,
5. ukamaćivanje je složeno i dekurzivno.

	Prenumerando (početkom razdoblja)	**Postnumerando (krajem razdoblja)**
Konačne vrijednosti više periodičkih uplata (isplata)	$S = R \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$	$S = R \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$

Početna vrijednost prenumerando i postnumerando periodičnih uplata (isplata)

	Prenumerando (početkom razdoblja)	Postnumerando (krajem razdoblja)
Sadašnje vrijednosti više periodičkih uplata (isplata)	$A = R \cdot \frac{r^n - 1}{r^{n-1}(r-1)}$	$A = R \cdot \frac{r^n - 1}{r^n (r-1)}$

Prenumerando i postnumerando

	Prenumerando (početkom razdoblja)	Postnumerando (krajem razdoblja)
Konačne vrijednosti više periodičkih uplata (isplata)	$n=\dfrac{\log\left(\dfrac{S\cdot(r-1)}{R\cdot r}+1\right)}{\log r}$	$n=\dfrac{\log\left(\dfrac{S\cdot(r-1)}{R}+1\right)}{\log r}$
Sadašnje vrijednosti više periodičkih uplata (isplata)	$n=\dfrac{\log\dfrac{R\cdot r}{R\cdot r-(r-1)\cdot A}}{\log r}$	$n=\dfrac{\log\dfrac{R}{R-(r-1)\cdot A}}{\log r}$

Konačna vrijednost prenumerando i postnumerando periodičnih uplata (isplata)

Primjer: Neka osoba ulagat će u banku početkom svake godine u idućih 5 godina iznos od 5.000*kn*. Kolikim iznosom će raspolagati na kraju pete godine ako je obračun kamata složen, godišnji i dekurzivan, a banka odobrava 5,55% godišnjih kamata?

$$n = 5$$
$$R = 5.000$$
$$p = 5,55$$

$$r = 1 + \frac{5,55}{100} = 1,0555$$

$$S_5 = R \cdot r \cdot \frac{r^5 - 1}{r - 1}$$

$$S_5 = 5.000 \cdot 1,0555 \cdot \frac{(1,0555)^5 - 1}{1,0555 - 1}$$

$$S_5 = 29.483,63$$

Konačna vrijednost prenumerando i postnumerando periodičnih uplata (isplata)

Primjer: Netko će ulagati krajem sljedeće tri godine po 10.000*kn*. Ako će na kraju treće godine na osnovi te tri uplate raspolagati iznosom od 33.100*kn*, uz koliki kamatnjak *p* je banka ukamaćivala?

$$n = 3$$
$$R = 10.000$$
$$S = 33.100$$

$$S_3 = R \cdot \frac{r^3 - 1}{r - 1}$$
$$S_3 = R \cdot \frac{(r-1)\left(r^2 + r + 1\right)}{r - 1}$$
$$S_3 = R \cdot \left(r^2 + r + 1\right)$$

$$10.000 \cdot \left(r^2 + r + 1\right) = 33.100 \;/ : 100$$
$$100r^2 + 100r + 100 = 331$$
$$100r^2 + 100r - 231 = 0$$
$$r_1 = 1{,}1$$
$$r_2 = -2{,}1 \text{ (ne može biti dekurzivan faktor)}$$

$$1{,}1 = 1 + \frac{p}{100} \;/ \cdot 100$$
$$110 = 100 + p$$
$$p = 10$$

Početna vrijednost prenumerando i postnumerando periodičnih uplata (isplata)

Primjer: Koliko godina bi trebalo uplaćivati početkom godine po 5.000*kn* ako se želi uštedjeti 62.897,38*kn*? Obračun kamata je složen, godišnji i dekurzivan, a godišnja kamatna stopa je 10.

$$R = 5.000$$
$$S = 62.897{,}38$$
$$p = 10$$

$$r = 1 + \frac{10}{100} = 1{,}1$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S \cdot (r-1)}{R \cdot r} + 1\right)}{\ln r}$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{62.897{,}38 \cdot (1{,}1 - 1)}{5.000 \cdot 1{,}1} + 1\right)}{\ln 1{,}1}$$

$$n \approx 8$$

Početna vrijednost prenumerando i postnumerando periodičnih uplata (isplata)

Primjer: Banka će sljedećih 15 godina, početkom godine, isplaćivati iznos od 20.000,00*kn*. Odredite sadašnju vrijednost cijele rente ako je dekurzivni godišnji kamatnjak 6.

$$R = 20.000$$
$$p = 6$$
$$n = 15$$

$$r = 1 + \frac{6}{100} = 1,06$$

$$A = R \cdot \frac{r^n - 1}{r^{n-1}(r-1)}$$

$$A_{15} = 20.000 \cdot \frac{1,06^{15} - 1}{1,06^{14}(1,06 - 1)}$$

$$A_{15} = 205.899,68$$

Zadaci

Zadatak 1. Petar ulaže u banku početkom svake godine po 15.000*kn*, tijekom pet godina. Ako je godišnji kamatnjak 7, kolika je konačna vrijednost tih uplata na kraju pete godine? Obračun je kamata godišnji, složen i dekurzivan.

Rješenje: 92.299,36

Zadatak 2. Koliki jednak iznos valja ulagati početkom svake godine, tijekom idućih šest godina, ako se želi na kraju šeste godine imati 80.000*kn*? Obračun je kamata godišnji, složen i dekurzivan uz godišnji kamatnjak 5.

Rješenje: 11.201,33

Zadatak 3. Neka osoba početkom svake godine u prve tri godine uplaćuje po 10000 eura uz 10% godišnje kamatne stope, a u daljnjih sedam godina po 15000 eura uz 8% godišnje kamatne stope. Koliko će ta osoba imati u banci na kraju petnaeste godine ako se i dalje primjenjuje godišnja kamatna stopa od 8%?

Rješenje: 304.077,09

Zadaci

Zadatak 4. Osoba ulaže u banku na ime stambene štednje krajem svakog mjeseca po 500*kn*. Koliku će svotu ta osoba imati u banci na kraju godine ako joj se u tom trenutku uplate i državna poticajna sredstva od 1.250kn? Godišnji kamatnjak je 3, a obračun kamata mjesečni, složen i dekurzivan.

Rješenje: 7.332,06

Zadatak 5. Odredite konačnu vrijednost osam godišnjih postnumerando uplata od po 100.000 eura na kraju dvadesete godine od prve uplate, ako je godišnja kamatna stopa bila 5%, a kapitalizacija dekurzivna i složena.

Rješenje: 16.346.798,20

Zadatak 6. Netko danas uloži u banku 100.000 kuna. Koliko će mu ostati na kraju šeste godine ako početkom svakog mjeseca podiže iz banke 1.000 kuna? Obračun kamata je složen, konforman i dekurzivan, a banka odobrava 7,5% kamata godišnje?

Rješenje: 28.789,55

Zadaci

Zadatak 7. Neka je osoba uložila u banku 40.000*kn* da bi imala pravo na kraju svake godine kroz 6 godina, računajući od danas, podizati po 6.500*kn*. Koliko će ostati na štednoj knjižici na kraju osme godine? Obračun kamata je složen, godišnji i dekurzivan, a godišnji kamatnjak je 16.

Rješenje: 52.616

Zadatak 8. Koliki iznos treba imati u banci da bi se danas moglo podizati sa štedne knjižice početkom svake godine kroz 8 godina po 60.000 kuna? Obračun kamata je složen i godišnji. Banka primijenjuje godišnji kamatnjak 7,5, a ukamaćivanje je dekurzivno.

Rješenje: 377.796

Zadatak 9. Koliko će se godina, početkom svake godine, podizati po 12.966.73 *kn*, a na temelju jednokratne uplate od 50.000*kn*? Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan, uz godišnji kamatnjak 2,5.

Rješenje: 4

Vječna renta

- Periodične uplate ili isplate mogu trajati:
  - određeno vremensko razdoblje,
  - neodređeno vremensko razdoblje (na primjer osobne rente koje se korisniku isplaćuju iz nekog trajnog izvora),
  - **vječno** (na primjer vječne rente koje se korisniku isplaćuju neograničeno od iznosa neke trajno jednake vrijednosti).

Vječna renta
$A_\infty = \dfrac{100 \cdot R}{p}$

Vječna renta

Primjer: Odredite sadašnju vrijednost dionica koje donose dividendu krajem svake godine u iznosu od 10.000,00*kn* ako dividenda traje vječno, a godišnji kamatnjak p iznosi 9.

$$R = 10.000$$

$$p = 9$$

$$A_\infty = \frac{100 \cdot R}{p}$$

$$A_\infty = \frac{100 \cdot 10.000}{9}$$

$$A_\infty = 111.111,11$$

Vječna renta

Primjer: Tržišna vrijednost trosobnog stana u Opatiji je 2.000.000*kn*.
Ako poslovne banke na oročena sredstva plaćaju godišnje kamate 8%, odrediti minimalnu godišnju najamninu za taj stan.

$$A_{\infty} = 2.000.000$$
$$p = 8$$

$$A_{\infty} = \frac{100 \cdot R}{p}$$
$$R = \frac{p \cdot A_{\infty}}{100}$$
$$R = \frac{8 \cdot 2.000.000}{100}$$
$$R = 160.000$$

Vječna renta

Primjer: Ispitajte da je li isplativije iznajmljivati stan za godišnju neto najamninu u iznosu od 55.000,00 *kn* ili ga prodati za 1.300.000,00 *kn* i oročiti dobivenu svotu u banci koja odobrava 5% godišnjih kamata na oročena sredstva.

$$N = 55.000$$
$$A_{\infty} = 1.300.000$$
$$p = 5$$

$$R = \frac{p \cdot A_{\infty}}{100}$$
$$R = \frac{5 \cdot 1.300.000}{100}$$
$$R = 65.000$$

Zaključujemo da je isplativije prodati stan i oročiti novac jer se tako može ostvariti godišnja renta od 65.000,00 *kn*, za razliku od najamnine u iznosu od 55.000,00 *kn*.

Neprekidno ukamaćivanje

- **Kontinuirano ili neprekidno** ukamaćivanje predstavlja specijalan slučaj složenog ukamaćivanja: kamate se obračunavaju i pribrajaju glavnici "u svakom trenutku„ razdoblja kapitalizacije.
- Iako je takav način ukamaćivanja u praksi besmislen, njegova je primjena moguća u slučajevima kao što je npr. određivanje prirodnog prirasta, u makroekonomiji, medicini itd.

Neprekidno ukamaćivanje
$C_n = C_0 \cdot e^{\frac{n \cdot p}{100}}$
$C_n = C_0 \cdot e^{\frac{1}{100}\left(p_1 + p_2 + \cdots p_n\right)}$

Neprekidno ukamaćivanje

Primjer: Odredite prosječni godišnji prirast purana ako on u 2 godine upeterostruči svoju težinu.

$$C_2 = 5C_0$$
$$n = 2$$

$$C_n = C_0 \cdot e^{\frac{n \cdot p}{100}}$$

$$C_2 = C_0 \cdot e^{\frac{2 \cdot p}{100}}$$

$$5C_0 = C_0 \cdot e^{\frac{2 \cdot p}{100}} \quad |\ln$$

$$\ln 5 = \frac{p}{50} \cdot \ln e$$

$$p = 50 \cdot \ln 5$$

$$p = 80,47189$$

Neprekidno ukamaćivanje

Primjer: Procijenite težinu djeteta nakon 4 godine ako je dijete rođeno sa 3,4 *kg*. Prve godine života dijete prosječno dobiva na težini 70%, druge 50%, treće 30%, a četvrte 20%.

$$n = 4$$
$$C_0 = 3{,}4$$
$$p_1 = 70$$
$$p_2 = 50$$
$$p_3 = 30$$
$$p_4 = 20$$

$$C_n = C_0 \cdot e^{\frac{1}{100}\left(p_1 + p_2 + \cdots p_n\right)}$$
$$C_4 = C_0 \cdot e^{\frac{1}{100}\left(p_1 + p_2 + p_3 + p_4\right)}$$
$$C_4 = 3{,}4 \cdot e^{\frac{1}{100}\left(70+50+30+20\right)}$$
$$C_4 = 3{,}4 \cdot e^{1{,}7}$$
$$C_4 = 18{,}61$$